KOORDINÁTAGEOMETRIA

Analitikus geometriai néven is ismerjük. A geometriának azon ága, mely a geometriai alakzatokat és a közöttük levő kapcsolatokat a koordinátarendszer bevezetésével, az algebra eszközeivel vizsgálja. A geometriai feladatokat szerkesztés, illetve geometriai módszerek helyett számítással oldja meg.

A koordinátarendszer és annak elnevezései az ANALÍZIS fejezet Függvények leírásánál találhatók.

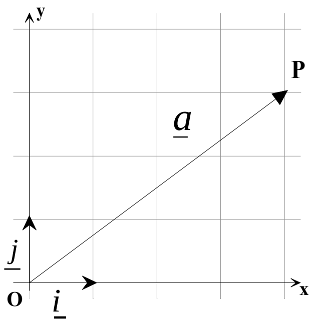
VEKTOROK

A koordinátageometria egyik segédeszköze a vektorok felhasználása. Segítségével tudjuk a geometriai feladatok jelentős részét egyszerűbb számítási módszerekre visszavezetni.

Helyvektor

A koordinátarendszer origójából, annak bármely pontjába mutató vektor.

Például az origóból a $P(4;3)$ *pontba mutató* $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$ *vektor helyvektor. Ismert az* $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ *jelölés is.*



Bázisvektor

A koordinátarendszer egységvektorait nevezzük bázisvektoroknak.

Ezek merőlegesek egymásra. Az **x** *tengelyen levő egységvektor jele:* $\underline{i}$ *, míg az* **y** *tengelyen levőé:* $\underline{j}$ *vektor. Így az előző* $\overrightarrow{OP}(4;3)$ *helyvektor felírható a bázisvektorok segítségével:* $\overrightarrow{OP} = 4 \cdot \underline{i} + 3 \cdot \underline{j}$ *alakban.*

MŰVELETEK VEKTOROKKAL

A műveletekhez legyenek adottak az alábbi helyvektorok: $\underline{a}(a_1;a_2)$; $\underline{b}(b_1;b_2)$

Összeadás

Helyvektorok összegének koordinátái megegyeznek az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak összegével.

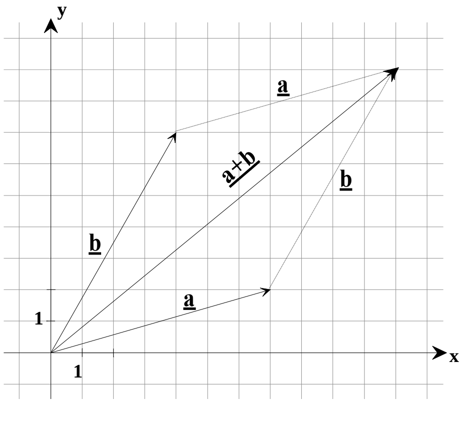
$$\underline{a}+\underline{b}\ (a_1+b_1;a_2+b_2)$$

Például:

$$\underline{a}(7;2)\ \underline{b}(4;7)$$

$$\underline{a}+\underline{b}\ (7+4;2+7)$$

$$\underline{a}+\underline{b}\ (11;9)$$

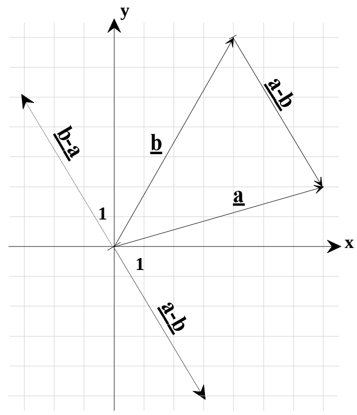


Ugyanígy értelmezhető több helyvektor összege is: az összegvektor első koordinátája az adott helyvektorok első koordinátáinak összege, míg az összegvektor második koordinátáját a helyvektorok második koordinátáinak összege adja.

Kivonás

Helyvektorok különbségének koordinátái megegyeznek az egyes helyvektorok megfelelő koordinátáinak különbségével.

$$\underline{a}-\underline{b}\ \left(a_1-b_1;a_2-b_2\right)$$



Például: $\underline{a}(7;2)\ \underline{b}(4;7)$

$\underline{a}-\underline{b}\ \left(7-4;2-7\right)$

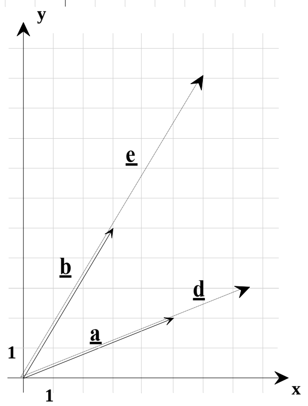
$\underline{a}-\underline{b}\ \left(3;-5\right)\quad \textit{és} \quad \underline{b}-\underline{a}\ \left(-3;5\right)$

A tanultak szerint a különbségvektor a kisebbítendő végpontjába mutat. Így ha az **a** vektorból vonjuk a **b** vektort, akkor a különbségvektor az **a** vektor végpontjába mutat.

Vektor szorzása számmal (konstanssal)

Egy vektor szám-szorosának koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáinak szám-szorosával.

Adott egy $\underline{a}\ \left(a_1;a_2\right)$ koordinátákkal adott vektor és egy $k\in R$ valós szám. Ekkor a $k\cdot\underline{a}$ vektoron azt a $\underline{c}=k\cdot\underline{a}$ vektort értjük, melynek koordinátái: $\underline{c}\ \left(k\cdot a_1;k\cdot a_2\right)$



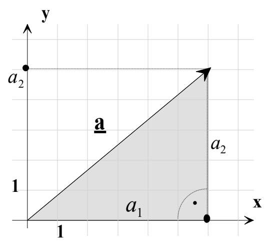
Például: Adottak a következő vektorok: $\underline{a}(5;2)\ ;\underline{b}\ (3;5)$

$$\underline{d}=\frac{3}{2}\cdot\underline{a}\ \Rightarrow\ \underline{d}\left(\frac{3}{2}\cdot 5;\frac{3}{2}\cdot 2\right)\ \Rightarrow \underline{d}\ \left(\frac{15}{2};3\right)$$

$$\underline{e}=2\cdot\underline{b}\ \Rightarrow\ \underline{e}(2\cdot 3;2\cdot 5)\ \Rightarrow\ \underline{e}\ (6;10)$$

Vektor hossza (abszolút értéke)

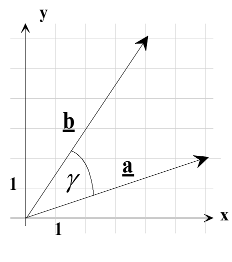
Egy $\underline{a}\left(a_1;a_2\right)$ vektor hossza *(abszolút értéke)* egyenlő a vektor két koordinátája négyzetösszegének négyzetgyökével. $|\underline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$



Például: $\underline{a}(6;5)\ \Rightarrow\ |\underline{a}|=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$

Vektor skaláris szorzata

A vektorok szorzatát kétféle módon is meghatározhatjuk. Adott két vektor: $\underline{a}\left(a_1;a_2\right)\ ;\underline{b}\left(b_1;b_2\right)$ Például: $\underline{a}(6;2)\ ;\underline{b}(4;6)$



1. Két vektor skaláris szorzata egyenlő, a megfelelő koordinátáik szorzatával: $\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$

   Például: $\underline{a}\cdot\underline{b}=6\cdot 4+2\cdot 6=24+12=36$

2. Két vektor skaláris szorzata egyenlő a két vektor abszolút értékének *(hosszának)*, és a két vektor által bezárt szög cosinusának szorzatával: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\gamma$

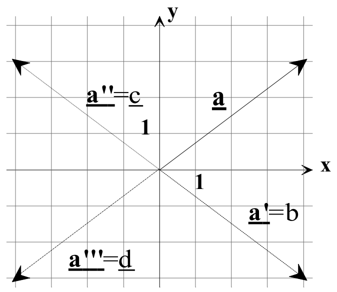
   A szög értéke: $\gamma=42^\circ 42'20''$, illetve $|\underline{a}|=\sqrt{40}\ ;|\underline{b}|=\sqrt{60}$.

   Így $\underline{a}\cdot\underline{b}=\sqrt{40}\cdot\sqrt{60}\cdot\cos 42^\circ 42'20''\approx 36$

Vektor végpontjának transzformációi

Helyvektor tükrözése az x és az y tengelyekre, valamint az origóra

Adott $\underline{a}(a_1;a_2)$ vektor: Például: $\underline{a}(4;3)$ vektor.



- **X** tengelyre vonatkozó tükörképét kapjuk, ha a vektor második koordinátáját ellentettjére változtatjuk: $\underline{a}'(a_1;-a_2)$

Például a $\underline{b}(4;-3)$ vektor az **a** vektor y tengelyre vonatkozó tükörképe.

- **Y** tengelyre vonatkozó tükörképét kapjuk, ha a vektor első koordinátáját ellentettjére változtatjuk: $\underline{a}''(-a_1;a_2)$

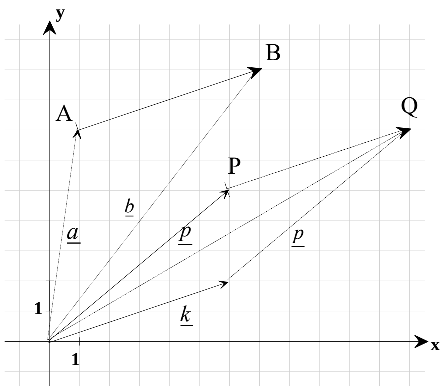
Például a $\underline{c}(-4;3)$ vektor az **a** vektor x tengelyre vonatkozó tükörképe.

- **O**-ra vonatkozó tükörképét kapjuk, ha a vektor mindkét koordinátáját ellentettjére változtatjuk: $\underline{a}'''(-a_1;-a_2)$

Például a $\underline{d}(-4;-3)$ vektor az **a** vektor origóra vonatkozó középpontos tükörképe

Vektor eltolása

A feladat adott $\overrightarrow{AB}$ vektor eltolása adott **P** kezdőpontba. Adottak a helyvektor koordináták: $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$; $P(p_1;p_2)$



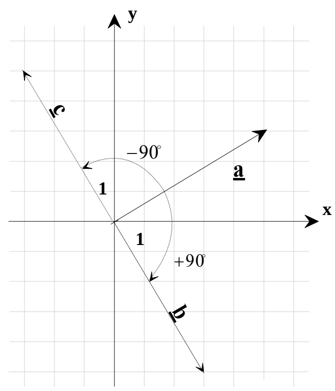
1. Megadjuk az adott vektor végpontjaiba mutató helyvektorok különbségvektorát, melyet úgy kapunk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit: $\underline{k}(b_1-a_1;b_2-a_2)$

2. A **P** pontba mutató helyvektorhoz hozzáadjuk a **k** vektort. Így a keresett **Q** pontba mutató helyvektor koordinátáit (azaz a **Q** pont) koordinátáit kapjuk: $\underline{q}(b_1-a_1+p_1;b_2-a_2+p_2)$

<u>Például:</u> Adottak a végpontok: $A(1;7)$; $B(7;9)$; $P(6;5)$ $\Rightarrow Q(7-1+6;9-7+5) \Rightarrow Q(12;7)$

Helyvektor origó körüli elforgatása 90°-kal.

Adott $\underline{a}(a_1;a_2)$ vektor origó körüli 90^0-kal elforgatott képének koordinátáit kapjuk, ha a vektor koordinátáit felcseréljük és a forgatás irányának megfelelően az egyik koordinátát ellentettjére változtatjuk:



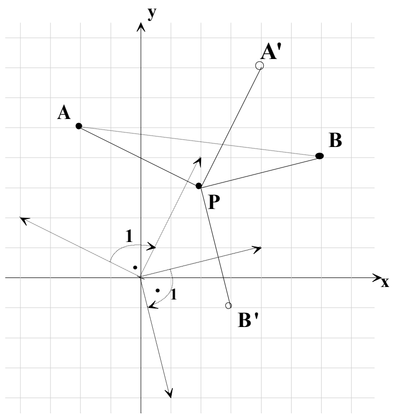
- $+90^\circ$-os forgatás esetén így: $\underline{b}(a_2;-a_1)$
- -90°-os forgatás esetén így: $\underline{c}(-a_2;a_1)$

<u>Például:</u> Adott az $\underline{a}(+5;+3)$ vektor. Forgassuk el mindkét irányban 90^0-kal az origó körül:

$$+90^\circ - os\ forgatás \Rightarrow \underline{b}(+3;-5)$$

$$-90^\circ - os\ forgatás \Rightarrow \underline{c}(-3;+5)$$

Vektor elforgatása tetszőleges P pont körül 90^0-kal



Elforgatni csak helyvektort tudunk 90^0-kal a következő eljárás alapján:

1. Vonjuk ki a pont helyvektorából a forgatási pont helyvektorát!
2. Forgassuk el a kapott vektort 90^0-kal a szükséges irányba!
3. Az elforgatott vektorhoz adjuk hozzá a forgatás középpontjának helyvektorát!

Így egy $A(a_1;a_2)$ pont $P(p_1;p_2)$ körüli elforgatott képe:

- *Ha a forgatás* **-90^0**-*os:*

$$A'[a_2 - p_2 + p_1; -(a_1 - p_1) + p_2]$$

- *Ha a forgatás* **$+90^0$**-*os:*

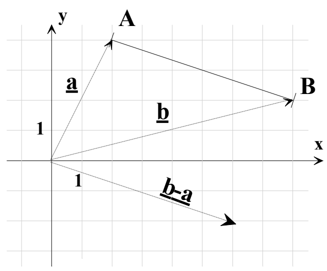
$$A'[-(a_2 - p_2) + p_1; a_1 - p_1 + p_2]$$

Például:

Forgassuk el az $A(-2;5)$ kezdőpontú, $B(6;4)$ végpontú vektort a $P(2;3)$ pont körül **-90^0**-kal. Az értékeket az előző képlet alapján számítjuk ki. (A rajzon az eljárást is bemutatjuk!)

$$A'[5-3+2;-(-2-2)+3] \Rightarrow A'(4;7)\text{, valamint } B'[4-3+2;-(6-2)+3] \Rightarrow B'(3;-1)$$

SZAKASZ HOSSZA



Egy $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$ végpontjaival adott szakasz hosszát megkapjuk, ha a végpontokba mutató helyvektorok különbségvektorának hosszát határozzuk meg.

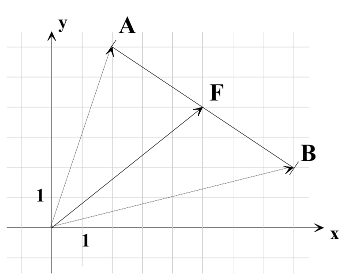
$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Például: Az $A(2;4)$; $B(8;2)$ végpontokkal adott szakasz hossza:

$$|AB| = \sqrt{(2-8)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

OSZTÓPONTOK

Szakasz felezőpontjának koordinátái



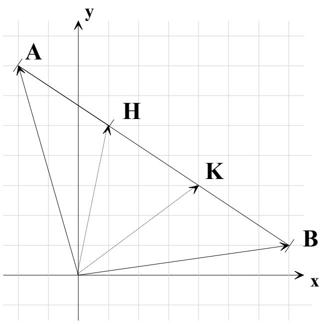
Egy $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$ végpontjaival adott szakasz **F** felezőpontjának koordinátái megegyeznek a végpontokba mutató helyvektorok megfelelő koordinátáinak számtani közepével.

$$F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Például: Adott a szakasz két végpontja: $A(2;6)$; $B(8;2)$ Ekkor a felezőpont koordinátái: $F\left(\frac{2+8}{2}; \frac{6+2}{2}\right) \Rightarrow F(5;4)$

Szakasz harmadoló-pontjának koordinátái

Az $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$ végpontjaival adott szakasz adott végpontjához közelebb eső harmadoló-pont meghatározása: (Például adottak az $A(-2;7)$; $B(7;1)$ végpontok.)



1. Az **A** ponthoz közelebb eső $H(h_1;h_2)$ harmadoló-pontjának koordinátái, vagyis melyek a szakaszt $AH:HB=1:2$ arányban osztják a következők szerint határozzuk meg:

$$H\left(\frac{2\cdot a_1+b_1}{3};\frac{2\cdot a_2+b_2}{3}\right)$$

Például: $H\left(\frac{2\cdot{}^{-}2+7}{3};\frac{2\cdot 7+1}{3}\right)\Rightarrow H(1;5)$

2. A **B** ponthoz közelebb eső $K(k_1;k_2)$ harmadoló-pontjának koordinátái, vagyis melyek a szakaszt $AK:KB=2:1$ arányban osztják a következők szerint határozzuk meg:

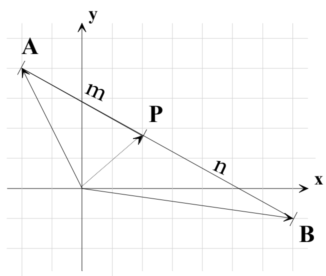
$$K\left(\frac{a_1+2\cdot b_1}{3};\frac{a_2+2\cdot b_2}{3}\right)$$

Például: $K\left(\frac{-2+2\cdot 7}{3};\frac{7+2\cdot 1}{3}\right)\Rightarrow K(4;3)$

Szakasz adott arányú osztópontjának koordinátái

Az $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$ végpontjaival adott szakasz azon $P(p_1;p_2)$ pontjának koordinátái, melyek a szakaszt $AP:PB=m:n$ arányban osztják úgy határozzuk meg, hogy a végpontokba mutató helyvektorok közül az **a** vektor **n** -szeresének és a **b** vektor **m** –szeresének összegét az $m+n$ összeg reciprokával szorozzuk meg. Így a **P** pontba mutató helyvektor:

$$\underline{p}=(n\cdot\underline{a}+m\cdot\underline{b})\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{n\cdot\underline{a}+m\cdot\underline{b}}{m+n}$$



Ebből a **P** pont koordinátái: $P\left(\frac{n\cdot a_1+m\cdot b_1}{m+n};\frac{n\cdot a_2+m\cdot b_2}{m+n}\right)$

Ha az arányt $\lambda=\frac{m}{n}\ ;\lambda\neq -1$ alakba írjuk, akkor a pont koordinátái:

$$P\left(\frac{a_1+\lambda\cdot b_1}{1+\lambda};\frac{a_2+\lambda\cdot b_2}{1+\lambda}\right)$$

Például: az $A(-2;4)$; $B(7;-1)$ végpontú szakaszt felosztjuk:

$m:n=3:5$ arányban.

$$P\left(\frac{5\cdot{}^{-}2+3\cdot 7}{3+5};\frac{5\cdot 4+3\cdot{}^{-}1}{3+5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{11}{8};\frac{17}{8}\right)\Rightarrow P(1{,}375\ ;\ 2{,}125)$$

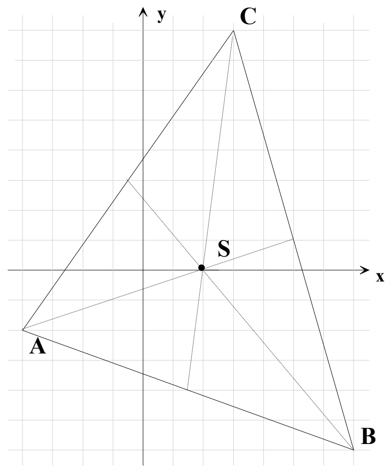
$\lambda=\frac{3}{5}=0{,}6$ arányban.

$$P\left(\frac{-2+0{,}6\cdot 7}{1+0{,}6};\frac{4+0{,}6\cdot{}^{-}1}{1+0{,}6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{2{,}2}{1{,}6};\frac{3{,}4}{1{,}6}\right)\Rightarrow P(1{,}375\ ;\ 2{,}125)$$

Súlypontok

A háromszög súlypontja



A háromszög súlypontjának koordinátáit megkapjuk, ha a háromszög csúcspontjainak koordinátáinak átlagát veszszük.

Legyenek a háromszög három csúcsának koordinátái: $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$; $C(c_1;c_2)$ Ekkor súlypontjának koordinátái: $S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

Például: A háromszög csúcspontjainak koordinátái:

$A(-4;-2)$; $B(7;-6)$; $C(3;8)$

A háromszög súlypontjának koordinátáit az előző képlettel számítjuk ki:

$$S\left(\frac{-4+7+3}{3};\frac{-2+^{-}6+8}{3}\right)\Rightarrow S(2;0)$$

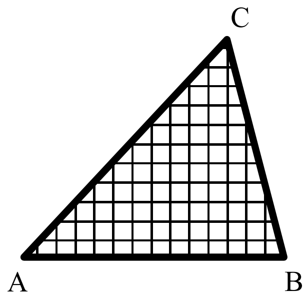
Pontrendszer súlypontja

Egy koordinátáival adott pontrendszer súlypontját kapjuk, ha a koordinátáik átlagát vesszük.

A pontrendszer pontjai: $A_1(a_{1,1};a_{2,1})$; $A_2(a_{1,2};a_{2,2})$; .....; $A_n(a_{1,n};a_{2,n})$ Ha a pontrendszer pontjai „egyensúlyúak", akkor a pontrendszer súlypontja:

$$S\left(\frac{a_{1,1}+a_{1,2}+...+a_{1,n}}{n};\frac{a_{2,1}+a_{2,2}+...+a_{2,n}}{n}\right)$$

Háromszög területe



Legyenek a háromszög három csúcsának koordinátái: $A(a_1;a_2)$; $B(b_1;b_2)$; $C(c_1;c_2)$ Ekkor a háromszög területe:

$$t_{ABC_\Delta}=\left|\frac{a_1\cdot(b_2-c_2)+b_1\cdot(c_2-a_2)+c_1\cdot(a_2-b_2)}{2}\right|$$

Például: A háromszög csúcspontjainak koordinátái:

$$A\left(\overset{a_1}{-4};\overset{a_2}{-2}\right);\ B\left(\overset{b_1}{7};\overset{b_2}{-6}\right);\ C\left(\overset{c_1}{3};\overset{c_2}{8}\right)$$

A háromszög területét az előző képlettel számítjuk ki:

$$t_{ABC_\Delta}=\left|\frac{-4\cdot(-6-8)+7\cdot(8-^{-}2)+3\cdot(-2-^{-}6)}{2}\right|=\left|\frac{56+70+12}{2}\right|=\left|\frac{138}{2}\right|=\underline{\underline{69}}\ \textit{területegy ség}$$

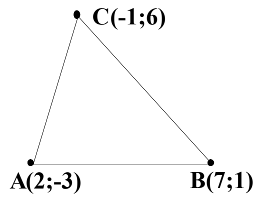
Típusfeladatok

Megoldási ötletek:

- A feladat megoldásához mindenképpen készítsünk vázlatot, melyre az adatokat írjuk rá, illetve a keresett értékeket jelöljük meg!
- Ha a feladatban adott értékek egész számok, valamint megfelelő nagyságrendűek, akkor ábrázoljuk ezeket koordinátarendszerben. Így a számításokkal kapott értékeket vissza tudjuk ellenőrizni a koordináták egyszerű leolvasásával!
- Ha az adatok nem pontos értékek *(gyökjelet, törtet tartalmaznak)*, akkor a vázlat alapján, esetleg szerkesztéssel juthatunk közelebb a megoldáshoz!
- Vannak olyan feladatok, melyek csak szerkesztéssel oldhatók meg. Ekkor vegyük fel a feladat feltételeinek megfelelő adatokat a síkon (és ne koordinátarendszerben) majd hajtsuk végre a szerkesztést a tanult geometriai ismeretek alapján. A szerkesztés lépései adják a feladat koordináta-geometriai megoldásának lépéseit is.

1.) Adott az $A(2;-3)$; $B(7;1)$; $C(-1;6)$ csúcspontú háromszög.

Elsőként vázlatot készítünk, melyen feltüntetjük az adatokat.



a.) Számítsuk ki az oldalak hosszát!

Az oldalak hosszát az ismert képlettel számítjuk ki.

$$|AB| = |c| = \sqrt{(2-7)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6{,}403$$

$$|AC| = |b| = \sqrt{(2-{}^{-}1)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 9{,}487$$

$$|BC| = |a| = \sqrt{(7-{}^{-}1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{89} = 9{,}434$$

b.) Számítsuk ki a területét!

A terület értékét kétféle módon is meghatározhatjuk.

1.) *A háromszög területét az oldalak hossza alapján, a* ***HERON képlettel*** *határozhatjuk meg. Ezt az előző értékek alapján határozhatjuk meg:*

$$s = (a+b+c)/2 = \underline{\underline{12{,}66}} \; ; \; T_{ABC_\Delta} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \underline{\underline{28{,}475}}$$

2.) *A terület értékét a* ***csúcspontok koordinátái alapján*** *is meghatározhatjuk:*

$$T_{ABC_\Delta} = \left|\frac{2\cdot(1-6)+7\cdot(6-{}^{-}3)+{}^{-}1\cdot(-3-1)}{2}\right| = \left|\frac{-10+63+4}{2}\right| = \underline{\underline{28{,}5}}$$

c.) Határozzuk meg a szögeit!

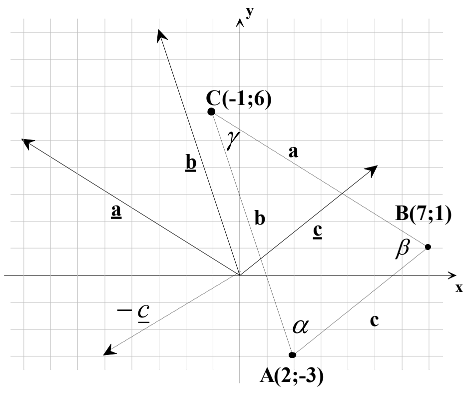
A szögek meghatározásához célszerű koordinátarendszerben ábrázolni a pontokat.

Határozzuk meg az ***a*** *,* ***b*** *,* ***c*** *oldalaknak megfelelő, a csúcsokba mutató helyvektorok különbségvektorait. Ezek koordinátáit megkapjuk, ha a csúcsok megfelelő koordinátáit kivonjuk egymásból. Figyelni kell arra, hogy a vektor abba a csúcsba mutat, amelyik helyvektorából kivonjuk a másikat. A koordináták így a következők:*

$$\overrightarrow{BC} = \underline{a} \quad (-1-7;6-1) \Rightarrow \underline{a}(-8;5)$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{b} \quad (-1-2;6-{}^{-}3) \Rightarrow \underline{b}(-3;9)$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{c} \quad (7-2;1-{}^{-}3) \Rightarrow \underline{c}(5;4) \quad \Rightarrow -\underline{c}(-5;-4)$$



A kapott vektorok akkora szöget zárnak be egymással, amekkorát a háromszög oldalai. A vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen is kiszámíthatjuk. A szögek értékét kapjuk, ha a szorzatokba behelyettesítjük a megfelelő vektorok koordinátáit, majd egyenletrendezéssel kapjuk meg a keresett szögek értékét. A szükséges képletek: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

A vektorok hosszára többször is szükség van. Ezek értékét az ***a.)*** *feladat megoldásakor határoztuk meg. Így* $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\underline{c}| = \sqrt{41} = 6{,}403$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\underline{b}| = \sqrt{90} = 9{,}487$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = |\underline{a}| = \sqrt{89} = 9{,}434$

A ***b*** *és a* ***c*** *oldal által bezárt szög:* α *ugyanakkora, mint a* **b** *és a* **c** *vektorok által bezárt szög. Így e két vektor skaláris szorzatában szereplő szög értékeként pontosan az* α *szög értékét kapjuk. A* β *Ugyanígy szöget - a rajz alapján - az* **a** *és a* **-c** *vektor által bezárt szög adja. Ekkor* $-\underline{c}(-5;-4)$. *A* γ *szög értékét kapjuk, ha az előző két szög értékét 180*^{0}*-ból kivonjuk:* $\gamma = 180^\circ - 69^\circ 47' - 70^\circ 40' = 39^\circ 33'$, *vagy az előzőekben ismertetett módon:*

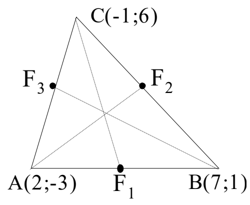
$\lvert\underline{b}\rvert \cdot \lvert\underline{c}\rvert \cdot \cos\alpha = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2$	$\lvert\underline{a}\rvert \cdot \lvert\underline{c}\rvert \cdot \cos\beta = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$	$\lvert\underline{a}\rvert \cdot \lvert\underline{b}\rvert \cdot \cos\gamma = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$
$\sqrt{90} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\alpha = -3 \cdot 5 + 9 \cdot 4$	$\sqrt{89} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\beta = -8 \cdot {}^{-}5 + 5 \cdot {}^{-}4$	$\sqrt{89} \cdot \sqrt{90} \cdot \cos\gamma = -8 \cdot {}^{-}3 + 5 \cdot 9$
$60{,}7453 \cdot \cos\alpha = 21$	$60{,}4069 \cdot \cos\beta = 20$	$84{,}4986 \cdot \cos\gamma = 69$
$\cos\alpha = 0{,}3457$	$\cos\beta = 0{,}3311$	$\cos\gamma = 0{,}77096$
$\alpha = 69^\circ 47'$	$\beta = 70^\circ 40'$	$\gamma = 39^\circ 33'$

d.) Számítsuk ki az oldalfelező pontok koordinátáit!

A háromszög oldalfelezési pontjait az ismert képlettel számítjuk ki: $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$ *Így a keresett koordináták a háromszög adott csúcspontjainak ismeretébe kiszámíthatók.*

$$F_1\left(\frac{2+7}{2}; \frac{-3+1}{2}\right) \Rightarrow F_1\left(\frac{9}{2}; -1\right); F_2\left(\frac{7+{}^{-}1}{2}; \frac{1+6}{2}\right) \Rightarrow F_2\left(3; \frac{7}{2}\right)$$

$$F_3\left(\frac{2+{}^{-}1}{2}; \frac{-3+6}{2}\right) \Rightarrow F_3\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$



e.) Határozzuk meg a súlypontjának koordinátáit!

A súlypont koordinátáinak értékét a három csúcspont koordinátáinak számtani közepe adja:

$$S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right) \Rightarrow S\left(\frac{2+7+{}^{-}1}{3}; \frac{-3+1+6}{3}\right) \Rightarrow S\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

f.) Számítsuk ki az A csúcsból induló α szög felezőjének és az A csúccsal szemközti BC oldal-egyenes P metszéspontjának koordinátáit!

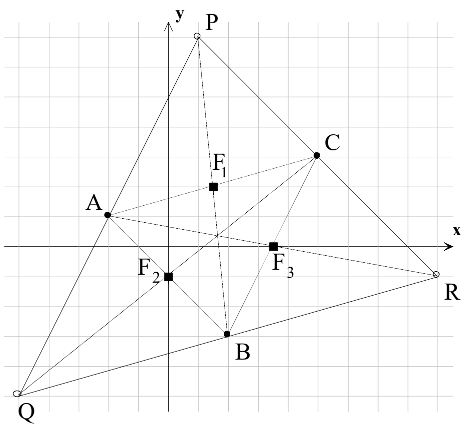
A szögfelezőtételt alkalmazzuk, mely szerint a háromszög egy szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak hosszának arányában osztja. Így az osztópont koordinátáit csak abban az esetben tudjuk megmondani, ha ismerjük az osztás arányát. Ekkor $\frac{m}{n} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$, *melyből az adott szakaszok hosszát már ismerjük az* ***a.)*** *feladatból.*

Így az arány: $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{90}}$, *melyből a* ***P*** *pont koordinátáit is felírhatjuk az ismert osztásarány alapján a* ***B*** *és a* ***C*** *pont koordinátáinak, mint szakasz végpontok ismeretében.*

$$P\left(\frac{n \cdot b_1 + m \cdot c_1}{m+n}; \frac{n \cdot b_2 + m \cdot c_2}{m+n}\right) \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{90} \cdot 7 + \sqrt{41} \cdot {}^{-}1}{\sqrt{90} + \sqrt{41}}; \frac{\sqrt{90} \cdot 1 + \sqrt{41} \cdot 6}{\sqrt{90} + \sqrt{41}}\right) \Rightarrow P(3{,}7 \ ; \ 3{,}0)$$

3.) Adott egy paralelogramma három csúcspontjának koordinátája. Adjuk meg a hiányzó csúcspont koordinátáit, ha: $A(-2;1)$; $B(2;-3)$; $C(5;3)$ **!**

A három pontot koordinátarendszerben ábrázoljuk. Az ábrázolás után további három olyan pont rajzolható, melyeket az eredeti három ponthoz negyedikként rendelve, a négy pont együtt egy parallelogrammát határoz meg (Lásd a rajzot!). Így a következő három paralelogramma állítható elő: **ABCP ; ACBQ ; ABRC** *paralelogrammák. A hiányzó csúcspontok meghatározása a cél.* ***Négy pont paralelogrammát határoz meg, ha átellenes pontjaik felezőpontjai egybeesnek.*** *(Például: ha az* ***ABCP*** *négyszög* ***AC*** *átlójának felezési pontja megegyezik a* ***BP*** *szakasz felezési pontjával.)*



1. *Meghatározzuk az* ***AC*** *szakasz* ***F₁*** *felezési pontját:*

$$F_1 = F_{AC}\left(\frac{-2+5}{2};\frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow F_{AC}\left(\frac{3}{2};2\right)$$

Ekkor a ***BP*** *szakasz az* ***ABCP*** *paralelogramma másik átlója, így felezési pontja ugyanez az* ***F₁*** *pont. Így a* $P(p_1;p_2)$ *pont koordinátái:*

$$\frac{p_1+2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow p_1 = 1 \text{ és } \frac{p_2+^{-}3}{2} = 2 \Rightarrow p_2 = 7$$

Így a pont koordinátái: $P(1;7)$

2. *A* ***Q*** *pontot ugyanígy határozzuk meg:* $F_2 = F_{AB}\left(\frac{-2+2}{2};\frac{1+^{-}3}{2}\right) \Rightarrow F_{AB}(0;-1)$ *A másik átló:* ***QC***

$$\frac{q_1+5}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = -5 \text{ és } \frac{q_2+3}{2} = -1 \Rightarrow q_2 = -5$$

Így a pont koordinátái: $Q(-5;-5)$

3. *Az* ***R*** *pontot is így számítjuk ki:* $F_3 = F_{BC}\left(\frac{2+5}{2};\frac{-3+3}{2}\right) \Rightarrow F_{BC}\left(\frac{7}{2};0\right)$ *A másik átló:* ***RA***

$$\frac{r_1+^{-}2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow r_1 = 9 \text{ és } \frac{r_2+1}{2} = 0 \Rightarrow r_2 = -1$$

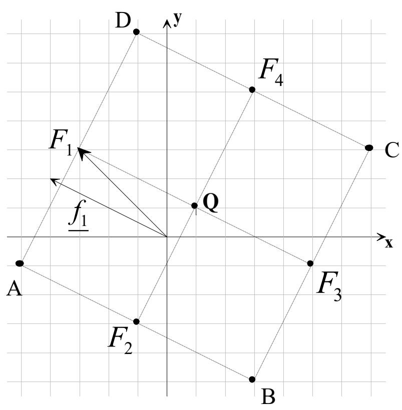
Így a pont koordinátái: $R(9;-1)$

4.) Egy négyzet egyik oldalfelező pontjába mutató helyvektor $(-3;3)$, illetve a négyzet középpontjának koordinátái $Q(1;1)$.

a.) Határozzuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit!

Ábrázoljuk koordinátarendszerben az adott vektort, illetve a négyzet középpontját. Mutasson az adott vektor, például az ***F₁*** *pontba. Ha a négyzet középpontját összekötjük az adott oldalfelezési ponttal, akkor a kapott szakasz* ***90⁰****-os elforgatottjai adják a többi oldalfelezési pontot.*

Mindez vektorokkal úgy néz ki, hogy előállítjuk a ***QF*** *vektornak megfelelő* $\underline{f_1}(-3-1;3-1) \Rightarrow \underline{f_1}(-4;2)$ *különbségvektort. Ezt háromszor egymás után elforgatjuk* ***+90⁰****-kal. Az elforgatott vektorokat a* ***Q*** *pontba tolva, sorban* ***F2 ; F3 ; F4*** *pontokba jutunk.*



Egy vektor +90⁰ –os elforgatott képét kapjuk a $v(v_1;v_2) \rightarrow \underline{v'}(-v_2;v_1)$ ***hozzárendeléssel.***

A forgatások sorrendjében oldjuk meg a feladatot:

1. *Az* $\underline{f_1}$ *vektor elforgatott képe:* $\underline{f_2}(-2;-4)$ *Ezt a* ***Q*** *pontba tolva (hozzáadva a* ***Q*** *pontba mutató helyvektort) kapjuk az* ***F₂*** *pont koordinátáit:* $F_2(-2+1;-4+1) \Rightarrow F_2(-1;-3)$

2. *Az* $\underline{f_2}$ *vektor elforgatott képe:* $\underline{f_3}(4;-2)$ *Ezt a* ***Q*** *pontba tolva kapjuk az* ***F₃*** *pont koordinátáit:*
$F_3(4+1;-2+1) \Rightarrow F_3(5;-1)$

3. *Az* $\underline{f_3}$ *vektor elforgatott képe:* $\underline{f_4}(2;4)$ *Ezt a* ***Q*** *pontba tolva kapjuk az* ***F₄*** *pont koordinátáit:*
$F_4(2+1;4+1) \Rightarrow F_4(3;5)$

A felezési pontok és az itt kapott vektorok alapján, többféle módon is meghatározhatók a négyzet csúcspontjai. Itt egy lehetséges megoldást mutatunk be: a felezési pontokhoz a szükséges vektorokat hozzáadva kapjuk a négyzet csúcspontjainak koordinátáit.

1. *Az* ***F₂*** *pont helyvektorához hozzáadjuk*

- **a.)** *az* $\underline{f_1}$ *vektort, akkor az* ***A*** *pont koordinátáihoz jutunk:* $A(-1+{}^{-}4;-3+2) \Rightarrow A(-5;-1)$
- **b.)** *az* $\underline{f_3}$ *vektort, akkor a* ***B*** *pont koordinátáihoz jutunk:* $B(-1+4;-3+{}^{-}2) \Rightarrow B(3;-5)$

2. *Az* ***F₄*** *pont helyvektorához hozzáadjuk*

- **a.)** *az* $\underline{f_1}$ *vektort, akkor az* ***D*** *pont koordinátáihoz jutunk:* $D(3+{}^{-}4;5+2) \Rightarrow D(-1;7)$
- **b.)** *az* $\underline{f_3}$ *vektort, akkor az* ***C*** *pont koordinátáihoz jutunk:* $C(3+4;5+{}^{-}2) \Rightarrow C(7;3)$

b.) Számítsuk ki a kerületét és a területét!

Mindkét érték meghatározásához szükségünk van a négyzet oldalának hosszára. Ezt a távolságképlet alapján határozzuk meg például az ***A*** *és a* ***B*** *pont esetén:* $d_{(A;B)} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1-{}^{-}5)} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

Így a keresett értékek:

$K = 4\cdot\sqrt{80} = 4\cdot\sqrt{16\cdot 5} = 4\cdot 4\cdot\sqrt{5} = 16\cdot\sqrt{5}$ *hosszúságegység.*

$T = \left(\sqrt{80}\right) = 80$ *területegység.*